**РУКОВОДСТВО К РЕШЕНИЮ КОНТРОЛЬНЫХ РАБОТ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»**

# Рекомендации по выполнению контрольной работы №2

Для получения допуска к экзамену по дисциплине «Математический анализ» во время сессии вам будет предложена аудиторная контрольная работа №2, задания в которой аналогичны примерам контрольной работы, размещенным ниже.

Контрольная работа №2 содержит 7 заданий и включает в себя задачи по теории предела, дифференциальному исчислению функций одной переменной, функциям многих переменных и неопределённому интегралу.

Для подготовки к аудиторной контрольной работе нужно выполнить до сессии один вариант контрольной работы №2 (в тонкой тетради в клетку). Номер варианта определяется последней цифрой шифра зачетной книжки. Если последняя цифра зачётки нечётная, то студент выполняет первый вариант. Если последняя цифра зачётки чётная, то студент выполняет второй вариант. Следовательно, задачами 1-го варианта будут 8.1; 9.1; 10.1; 11.1; 12.1; 13.1; 14.1. Задачами 2-го варианта будут 8.2; 9.2; 10.2; 11.2; 12.2; 13.2; 14.2.

## Контрольная работа №2

Задания 8.1 – 8.2. Найдите пределы последовательностей.

8.1. а) **** б) 

8.2. а) **** б) 

Задания 9.1 – 9.2. Найдите пределы функций.

9.1. а)  б)  в) 

9.2. а)  б)  в) 

Задания 10.1 – 10.2. Найдите производную  заданных функций

10.1. а)  в) 

б)  г) 

10.2. а)  в) 

б)  г) 

Задания 11.1 – 11.2. Найдите предел функции, используя правило Лопиталя.

11.1.  11.2. 

Задания 12.1 –12.2. Дана функция 

1) найдите все частные производные первого порядка и вычислите их значения в точке ;

2) найдите 

3) найдите производную в точке  по направлению вектора 

12.1.  

12.2.  

Задания 13.1 – 13.2. Дана функция  Вычислите значение ее частной производной четвертого порядка в точке 

13.1.  

13.2.  

Задания 14.1 – 14.2. Найдите неопределенные интегралы.

14.1. а)  в) 

б)  г) 

14.2. а)  в) 

б)  г) 

# 3. Теоретические сведения к выполнению

# контрольной работы №2

**Задания 8.1 – 8.2.** Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*, в противном случае – *расходящейся*.

Если последовательности  и  сходятся, то:

  (32)

 (33)



  (34)

Выражения вида        называются *неопределенностями*.

При раскрытии неопределенности вида  используют формулу

 (35)

где  – иррациональное число.

**Задания 9.1 – 9.2.** Если существуют  и  то:

 





 

Простейшие случаи, которые встречаются при вычислении пределов различных выражений:

  

 

 

При раскрытии неопределенности вида  часто используют формулы:

 (*первый замечательный предел*);

 

 

При раскрытии неопределенности вида  используют второй замечательный предел:

 

Функция  называется *бесконечно малой при*  если 

Если  где  и  – бесконечно малые при  то  и  называются *эквивалентными*; пишут  

Если отношение двух бесконечно малых имеет предел, то он не изменится при замене каждой из бесконечно малых эквивалентной ей бесконечно малой.

Если  при  то верны следующие эквивалентности:

 

 

 



**Задания 10.1 – 10.2.** Правила дифференцирования. Если ,  – дифференцируемые функции,  – постоянная величина, то:



 





 

Если  – сложная функция, где ,  – дифференцируемые функции, то

 т. е. 

Таблица производных основных элементарных функций

(в этой таблице справа )

1.   

в частности,

2.  

3.  

4.   

в частности,

5.  

6.   

7.  

8.  

9.  

10.  

11.  

12.  

13.  

14.  

15.  

**Задания 11.1 – 11.2.** Правило Лопиталя. Если  и  – непрерывные функции, имеющие производные в проколотой окрестности точки  причем ,  в указанной окрестности,  (или  и существует  то



**Задания 12.1 – 12.2.** При вычислении частной производной  функции трех переменных  считают *y*, *z* постоянными и пользуются правилами дифференцирования и таблицей производных для функции одной переменной *x*.

При вычислении частной производной  считают, что *y* – переменная величина, *x*, *z* – постоянные, дифференцируют как функцию переменной *y*; при вычислении частной производной  считают, что *z* – переменная величина, *x*, *y* – постоянные, дифференцируют как функцию переменной *z*.

*Градиентом функции*  в точке  называется вектор

 (36)

Если вектор  имеет направляющие косинусы    то производную функции  в точке  по направлению вектора  находят по формуле

 (37)

Орт (единичный вектор)  вектора  имеет координаты

 (38)

**Задания 13.1 – 13.2.** *Частными производными второго порядка* функции  называются частные производные от ее частных производных первого порядка:

   

Аналогично определяются частные производные третьего, четвертого и высших порядков от функции трех и более переменных.

*Смешанной частной производной* называется частная производная второго порядка и выше, взятая по различным переменным.

Если частные производные высшего порядка непрерывны, то смешанные производные одного порядка не зависят от порядка дифференцирования.

**Задания 14.1 – 14.2.** Правила интегрирования.

 





Таблица основных неопределенных интегралов

1.  2. 

3.   4. 

5.   6. 

7.  8. 

9.  10. 

11.  12. 

13.  14. 

15.  16. 

*Метод непосредственного интегрирования* основан на использовании только основных свойств неопределенного интеграла и таблицы интегралов.

*Метод замены переменной* (или *метод подстановки*) используют в двух случаях:

а) 

где  – первообразная для 

б) 



где  – первообразная для 

При использовании *метода поднесения под знак дифференциала* замену переменной не применяют. Интеграл вычисляют по формуле



где  – первообразная для 

*Дифференциал* функции  равен  Используют свойства дифференциала:

, , , , .

*Интегрированием по частям* называется вычисление интеграла по формуле

 (38)

где   – дифференцируемые функции.

Для нахождения интегралов

  

где  – многочлен, за *u* принимают многочлен  а за  – выражения соответственно   

Для нахождения интегралов

 

за *u* принимают выражения соответственно  

## 4. Примеры решения типовых заданий контрольной работы №2

Задание 8. Найти пределы последовательностей:

а) **** б) ****

в) 

*Решение.* а) Преобразуем данное выражение. Для этого в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки общий множитель . Учитывая, что





получаем

****

****



Имеем отношение бесконечно больших величин, т. е. неопределённость вида , для раскрытия которой необходимо разделить числитель и знаменатель дроби на  (т. е. на старшую степень ):



Знаменатель полученной дроби при  не равен нулю, следовательно, можно применить теорему о пределе частного (34), теоремы о пределах (32) и (33):



б) Преобразуем данное выражение. Для этого в числителе и знаменателе дроби вынесем за скобки общий множитель . Учитывая, что





получаем

****

****

****

****

Имеем отношение бесконечно больших величин, т. е. неопределенность вида . Разделим числитель и знаменатель дроби на старшую степень  и получим

****

в) В данном случае предел основания степени равен 1 (в этом легко убедиться, разделив числитель и знаменатель на ), а показатель стремится к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида . Преобразуем функцию так, чтобы использовать формулу (35). Получим









Задание 9. Найти пределы функций:

а)  б)  в) 

*Решение.* а) Непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента  приводит к неопределённости вида . Для ее раскрытия преобразуем исходное выражение, разложив на множители многочлен в числителе дроби. Для этого найдем корни многочлена   

Переведем иррациональность из знаменателя в числитель, чтобы получить в знаменателе разность квадратов. Для этого умножим числитель и знаменатель на . Получаем









б) Непосредственная подстановка в данное выражение предельного значения аргумента  приводит к неопределенности вида . Преобразуем числитель и знаменатель дроби, используя тригонометрические формулы:

, .

Получим



Найдем предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции. Так как  то    тогда



в) Имеем неопределенность вида . Найдем предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции. Так как  ,  то



Задание 10. Найти производную функций:

а)  в) 

б)  г) 

*Решение.* а) Учитывая, что  и , имеем



Применяя правила дифференцирования и используя формулы (1) и (4) таблицы производных, находим





б) Запишем функцию в виде 

Имеем 

Для нахождения производной первого слагаемого используем формулу  и правило дифференцирования сложной функции. Получаем









Для нахождения производной второго слагаемого применим формулу  и правило дифференцирования сложной функции. Получаем





Таким образом, имеем



в) Используя правило дифференцирования сложной функции, получим











г) Применим свойства логарифма    для упрощения выражения, задающего функцию, учитывая, что , получаем



Поэтому заданная функция может быть записана в виде



Согласно правилам дифференцирования, используя формулу (7) таблицы производных, находим









Задание 11. Найти предел функции, используя правило Лопиталя:

а)  б) 

*Решение.* а) Имеем неопределенность вида , для раскрытия которой применим правило Лопиталя:





б) Имеет место неопределенность вида . Преобразуем ее к неопределённости вида , а затем применим правило Лопиталя.







Задание 12. Дана функция :

1) найти все частные производные первого порядка и вычислить их значения в точке ;

2) найти 

3) найти производную в точке  по направлению вектора 

*Решение.* 1) Считая  и  постоянными при условии переменной , находим



Затем, полагая  и  постоянными, имеем 



Аналогично, считая  и  постоянными, получаем



Вычислим значения частных производных в точке 







Градиент функции  в точке  находим по формуле (36):



Найдем координаты орта вектора  по формуле (38):





Таким образом,   

Отсюда (с учетом формулы (37))



Задание 13. Дана функция  Вычислить значение ее частной производной четвертого порядка  в точке 

*Решение.* Поскольку результат нахождения данной смешанной производной не зависит от порядка дифференцирования по переменным, то вначале дифференцируем по , так как в таком случае производная двух слагаемых равна  (отсутствует переменная ). Считая  функцией, зависящей только от , получаем



Далее рациональным является дифференцирование по переменной . Считая  функцией, зависящей только от , имеем



Остается два раза продифференцировать по переменной . Считая  функцией, зависящей только от , получаем



Считая  функцией, зависящей только от , имеем





Вычислим значение полученной частной производной четвертого порядка в точке 



Задание 14. Найти неопределенные интегралы:

а)  б) 

в)  г) 

д)  е) 

*Решение.* а) Преобразуем подынтегральное выражение, а затем используем правила интегрирования и формулы (3), (4) таблицы интегралов:









б) Найдем данный интеграл, применив последовательно два раза формулу (38) интегрирования по частям, так как одним из множителей является многочлен второй степени.

Положим   Тогда   При нахождении  можно считать, что . Тогда



Итак, мы понизили степень многочлена под знаком интеграла на единицу. Для нахождения полученного интеграла вновь применим формулу интегрирования по частям. Положим  Тогда   Имеем





Окончательно получаем





При решении данного примера приведено подробное объяснение использования метода интегрирования по частям. Образец компактного оформления представлен в решении следующего примера.

в) Воспользуемся методом интегрирования по частям.







 

г) *1-й способ.* Выполним подстановку  Тогда



Получим





*2-й способ.* Применим метод поднесения под знак дифференциала. Так как , то



д) *1-й способ.* Применим подстановку  тогда

 Получим





Перейдя к переменной , получим



*2-й способ.* Применим метод поднесения под знак дифференциала. Так как , то





е) Разделив почленно числитель на знаменатель, получим два интеграла.





Наличие множителя  в числителе первого интеграла позволяет использовать метод поднесения под знак дифференциала. Поскольку для знаменателя имеем , то дополним числитель (тождественно) до выделения дифференциала знаменателя:











Находим первый интеграл, используя формулу (4) таблицы интегралов. Выделим в знаменателе подынтегрального выражения во втором интеграле полный квадрат.



Тогда





Используем формулу (14) таблицы интегралов и приходим к ответу.





# 5. Рекомендуемая литература для подготовки

# к контрольной работе №2

1. Гусак, А. А. Математический анализ и дифференциальные уравнения. Примеры и задачи : учеб. пособие / А. А. Гусак. – Минск : ТетраСистемс, 2011. – 416 с.

2. Майсеня, Л. И. Справочник по математике: основные понятия и формулы / Л. И. Майсеня. – Минск : Выш. шк, 2012. – 399 с.

3. Математика в примерах и задачах : учеб. пособие. В 2 ч. / Л. И. Майсеня [и др.] ; под общ. ред. Л. И. Майсени. – Минск : Выш. шк., 2014. – Ч. 1. – 356 с. ; Ч. 2. – 430 с.

4. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс / Д. Т. Письменный. – М. : Айрис-пресс, 2011. – 608 с.